une nouvelle approche pour l'outil informatique

José Mène Berre – Ing. ESGT-CNAM – Enseignant

Introduction

En topographie, ***le calcul du gisement à partir de points connus en coordonnées rectangulaires*** fait appel essentiellement aux opérations arithmétiques.

Le présent article propose une approche nouvelle, désormais utile et possible, grâce à la performance des outils informatiques modernes (calculatrices programmables, ordinateurs).

Parmi les quatre méthodes que le lecteur aura à sa disposition, j'en propose une nouvelle dont nous verrons les avantages. Auparavant je vais revenir sur une notion mathématique plus large : les coordonnées polaires.

I. Des coordonnées polaires au gisement

I.1. Les coordonnées polaires

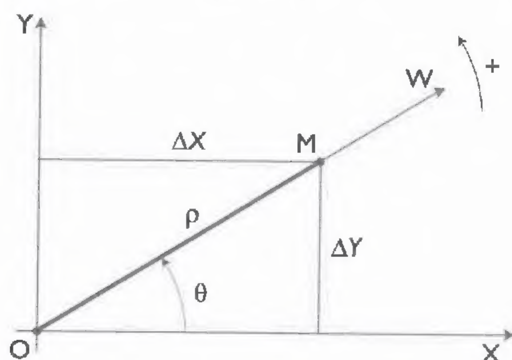


Fig. 1 – Conventions de la Trigonométrie

Soit le système orthonormé (O, X, Y) dans un plan orienté dans le sens trigonométrique. À tout point M du plan orienté, on peut associer la direction orientée (O, W) passant par le point M (X_M, Y_M) :

- *(O, X) est l'axe polaire, d'origine O (le « pôle »)*
- *θ = (OX, OM) = angle polaire*
- *$\rho = \overline{OM}$ = rayon polaire (ou rayon vecteur)*
- *ρ et θ sont les coordonnées polaires de M dans ce système.*

Si on considère la fonction *tangente* $\tan\theta = (\Delta Y / \Delta X)$, on définit la fonction inverse *arctangente* par l'expression :

$$\theta = Arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) = Arctg\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right) \qquad (E1)$$

Arctg admet une infinité de déterminations. La principale est comprise dans l'intervalle $[-\pi/2 ; +\pi/2]$ radians.

I.2. Le gisement en topographie

Les conventions utilisées en mathématiques *(fig. 1)* diffèrent sur certains aspects de celles de la topographie *(fig. 2)*

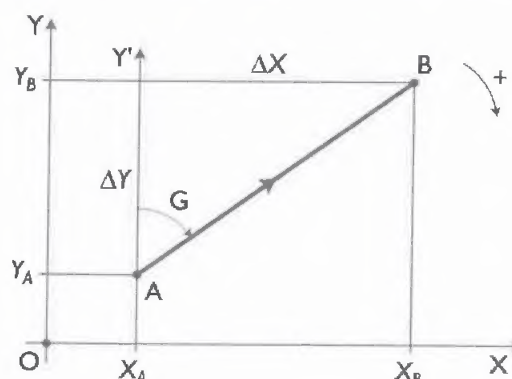


Fig. 2 – Conventions de la topographie

- *(OY) est l'axe polaire (dans un système général, c'est l'axe origine du système de projection).*
- *Le sens positif des angles topographiques est le sens de rotation des aiguilles d'une montre (sens dextrogyre).*
- *On détermine le système de coordonnées de manière à travailler avec des points situés dans le cadran dont X et Y sont positifs.*
- *L'unité angulaire utilisée en topographie est le grade (exclue du système international). Son symbole est « gon ».*

Le gisement d'une direction orientée (AB) est l'angle que fait (AB) avec (AY') axe parallèle à l'axe des ordonnées du plan. Il est compté dans le sens direct topographique, de 0 à 400 gons.

Le gisement de (AB) se calcule en deux étapes :

- *Application de la formule*

$$G = Arctg\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) = Arctg\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right) \qquad (E2)$$

qui est valable pour $\Delta Y \neq 0$ et donne des résultats compris entre [–100 ; +100] gon :

- *Transformation des valeurs calculées avec (E2) (de l'intervalle* [–100 ; +100] *vers l'intervalle* [0 ; +400[*gon).*

La maîtrise du mécanisme de cette transformation fait l'intérêt des méthodes de calcul qui vont être exposées dans ce qui suit.

2. Le calcul du gisement par la méthode traditionnelle

Dans cette première méthode, le mécanisme de transformation de G est fondé sur l'observation des signes des coordonnées relatives : $\Delta X = X_B - X_A$ et $\Delta Y = Y_B - Y_A$.

Nous distinguerons 4 cas selon la position relative de B par rapport à A *(fig. 3)*.

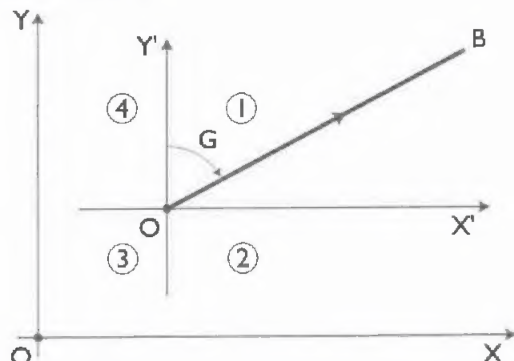


Fig. 3 – Les cadrans de calcul du gisement

B situé dans le :	Intervalles (en grades)	ΔX	ΔY	Gisement G_{AB}
Cadran 1	]0 ; 100]	+	+	G_{AB} = G
Cadran 2	]100 ; 200[	+	–	G_{AB} = G + 200
Cadran 3	]200 ; 300[	–	–	G_{AB} = G + 200
Cadran 4	]300 ; 400[	–	+	G_{AB} = G + 400

Le tableau de calcul du gisement G_{AB} d'une direction orientée AB ci-dessus peut se résumer par les 3 conditions (C_k) ci-dessous :

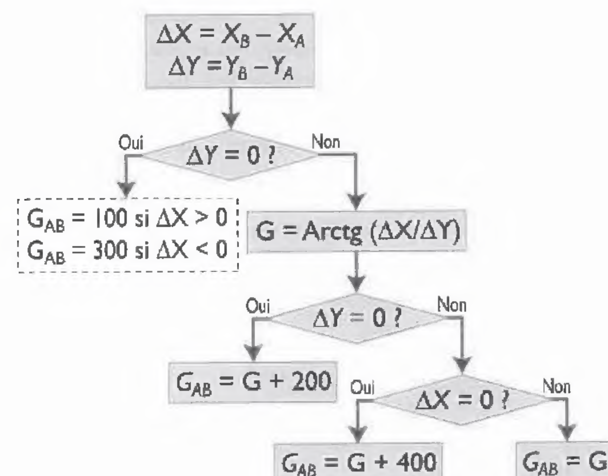
(C_1) Si $\Delta Y < 0$ et $\forall \Delta X$ alors $G_{AB} = G + 200$

(C_2) Si $\Delta Y > 0$ et $\Delta X > 0$ alors $G_{AB} = G$

(C_3) Si $\Delta Y > 0$ et $\Delta X < 0$ alors $G_{AB} = G + 400$

Les deux dernières méthodes que nous verrons plus loin seront basées sur ces conditions.

Algorithme (on exclut le cas sans intérêt où $\Delta X = \Delta Y = 0$) :



Atouts de cette méthode :

- *Elle permet de bien prendre conscience des différents cas en fonction des signes des paramètres.*
- *Elle est adaptée aux calculs manuels et ne requiert pas de calculatrice programmable*

Limites de cette méthode :

- ATAN *($\Delta X/\Delta Y$) n'est calculable que si $\Delta Y \neq 0$.*
- *Il faut prévoir des conditions pour avoir G_{AB} = 100 ou 300 gons.*

3. Le calcul du gisement par des méthodes orientées informatique

3.1. Méthode basée sur la fonction informatique *ATAN2 (X, Y)*

Divers outils informatiques actuels intègrent la fonction trigonométrique *ATAN2*. Citons par exemple : les outils de Microsoft© (Visual Basic, VB applications, tableur Excel), le langage C de Borland (dans sa librairie « Math.h »), etc.

Pour calculer le gisement topographique à l'aide de la fonction informatique ATAN2 (X, Y), il faut :

- *Se rappeler que ATAN2 retourne des valeurs en radians*
- *Utiliser* ATAN2 *($\Delta Y/\Delta X$) au lieu* ATAN2 *($\Delta X/\Delta Y$) de pour tenir compte de la différence des conventions entre la topographie et la trigonométrie.*

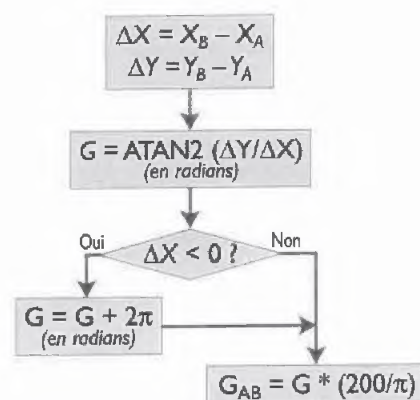
Avantages de cette méthode :

- *La fonction* ATAN2 *($\Delta Y/\Delta X$) est définie pour $\Delta X = 0$ ou. (La seule fois où elle vous indiquera une erreur, c'est lorsque vous donnerez simultanément les deux arguments avec une valeur nulle !).*
- *Elle est certainement la plus avantageuse à utiliser lorsque l'outil informatique en est doté.*

Limites de cette méthode :

- *Lorsque $\Delta X < 0$, il faut toujours ajouter 2π radians au résultat issu de* ATAN2 *($\Delta Y/\Delta X$).*
- *Convertir à chaque fois les radians en grades (en multipliant le résultat par 200 et en divisant par π).*

Algorithme (on exclut le cas sans intérêt où $\Delta X = \Delta Y = 0$) :



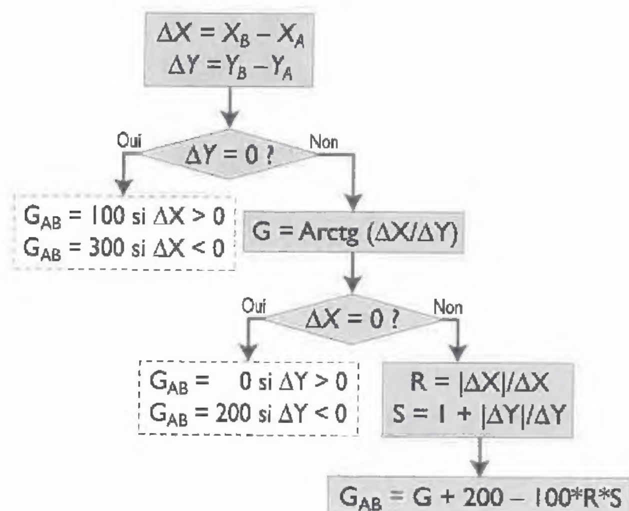
3.2. Méthode basée sur une formule unique [1]

Alors que dans la méthode traditionnelle, nous devons examiner les signes des coordonnées relatives, dans la présente méthode le gisement s'obtient par l'application d'une seule formule :

$$G_{AB} = \operatorname{a\,tan}\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right) + 200 - 100 * \left[\frac{\overline{\Delta X}}{\Delta Y}\right] * \left[1 + \frac{\overline{\Delta Y}}{\Delta Y}\right]$$

1 Pour les éventuels détails de syntaxe, nous conseillons de se reporter à la documentation du langage informatique utilisé.

Algorithme (on exclut le cas sans intérêt où $\Delta X = \Delta Y = 0$) :



Les avantages de cette méthode sont :

- *Intégrer en une seule formule toutes les conditions de calcul d'un gisement.*
- *S'abstenir d'analyser le signe des coordonnées relatives.*
- *Être facile à implémenter (programmer).*

Limites de cette méthode :

- *Elle n'est pas définie lorsque $\Delta X = 0$ et lorsque $\Delta Y = 0$.*

3.3. La combinaison de « Mène-Berre »

Pour l'établir, j'ai traduit chacune des conditions (C_k) de la méthode traditionnelle par des fonctions mathématiques.

- *La condition (C_1) qui consiste à rajouter 200 gons à la valeur de G lorsque $\Delta Y < 0$ pourra se traduire par :*
  $C_Y = 100^* [1 - |\Delta Y|/\Delta Y]$.
- *La condition (C_2) est sans effet sur le résultat final.*
- *La condition (C_3), qui consiste à rajouter 400 gons à la valeur de G lorsque $\Delta X < 0$ pourra se traduire par une fonction qui certes rajoute 400 gons à G, mais qui surtout ramène tout nombre réel dans l'intervalle [0 ; +400[. Cette fonction qui est équivalente au « modulo » est $G_{AB} = G - 400 * E(G/400)$ où E désigne la fonction partie entière.*

Le gisement se calculera par l'application successive des deux formules ci-dessous :

$$G = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right) + 100 * \left[1 - \frac{|\Delta Y|}{\Delta Y}\right] \quad \text{et}$$

$$G_{AB} = G - 400 * E\left(\frac{G}{400}\right)$$

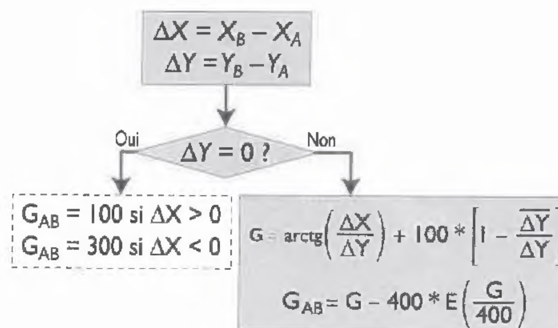
Si dans la plupart des langages informatiques la première formule s'écrit :

G = atan (ΔX/ΔY) + 100*(1 – ABS (ΔY)/(ΔY))

Notons qu'aujourd'hui certains langages informatiques intègrent l'opérateur « modulo » ou son équivalent. Dans ce cas, la syntaxe de la deuxième formule varie selon les outils :

- *Sur calculatrices en basic (Casio, Sharp) :*
  G_{AB} = G – 400*INT (G/400)
- *Sur Excel :* G_{AB} = MOD (G ; 400)
- *Sur Visual Basic :* G_{AB} = Remainder (G,400)

Algorithme (on exclut le cas sans intérêt où $\Delta X = \Delta Y = 0$) :



Les avantages de cette méthode sont :

- *Elle conserve la logique « traditionnelle » (tout en la traduisant par des concepts mathématiques simples : « partie entière », « modulo »).*
- *Elle se programme aisément (sur les calculatrices programmables ; Tableurs, etc.)*
- *Elle conserve les mêmes propriétés que celles de l'arctangente (indéfinie lorsque $\Delta Y = 0$!).*

Limite de cette méthode :

- *Lors de la programmation, il faudra prévoir des conditions pour les 2 cas particuliers où G_{AB} = 100 ou 300 gons.*

Conclusion

Le gisement est l'un des éléments clés du calcul géométrique appliqué à la topographie. Sa compréhension, son calcul et son implémentation sur informatique peuvent intéresser les étudiants et professionnels de divers métiers. Citons-les : Topographes, Cartographes, Géomaticiens, Photogrammètres, Informaticiens, Mathématiciens, Hydrographes, Navigateurs, Ingénieurs et techniciens du génie civil, des travaux publics et du bâtiment, Archéologues, Géologues, etc.

Pour tous, nous espérons que le présent article sera d'un intérêt à la fois pédagogique, technique et pratique.

Références

[1] M. Elayaci (1999), Opération simple et rapide, Revue XYZ n° 78 – 1er Trimestre, p. 90.